בפרקים הקודמים

# המשך (1)

f על ⬄ הפיכה מימין כך ש

לכל b קיים מקור כך ש(אם קיימים מספר מקורות, נבחר אחד מהם)

# (2) טענה

f חח"ע ⬄ f הפיכה משמאל כלומר קיימת כך ש

## הוכחה

: נתון f הפיכה משמאל. נניח . מכאן נובע ש כלומר אבל ולכן

: נתון f חח"ע. יהי . נגדיר ע"י .  
g מוגדרת היטב: נניח . אם אזי . אם אז קיימים כך ש ומכיוון שf חח"ע מתקיים והרי , ולכן . נשים לב ש וכן לכל מתקיים

# (3) טענה

f חח"ע ועל ⬄ f הפיכה כלומר קיימת כך ש ו

## הוכחה

לפי . קיימות כך ש . נוכיח :

## הערה

g הנ"ל תסומן **(פונקציה יחידה)**, נקראת הפונ' ההופכית של f.

# הערה

תהי חח"ע ⬄ קיימת על

## הוכחה

חח"ע ⬄ כך ש, כלומר g הפיכה מימין ⬄ g על

# טענה

תהיינה פונק'.

1. f,g חח"ע => חח"ע
2. f,g על => על

## הוכחה

**(1)** דרך א: נניח . לפי ההגדרה . g חח"ע ולכן . f חח"ע ולכן

דרך ב: f חח"ע לכן קיימת כך ש. g חח"ע לכן קיימת B כך ש.  
מתקיים לכן הפיכה משמאל ולכן חח"ע

**(2)** דרך א: יהי . צ"ל שקיים כך ש. g על לכן קיים כך ש. f על לכן קיים כך ש. לכן

דרך ב: f על ולכן הפיכה מימין . g על ולכן הפיכה משמאל : מתקיים כמו קודם

# הגדרה

תהי ויהיו . נגדיר קבוצות:

- התמונה ההפוכה

**אינה** הפונקציה ההופכית של f

## דוגמאות

# טענה

תהי . תהי משפחה של תתי קבוצות של A. אזי:

1. 2)

## הוכחה

1. יהי ⬄ ⬄ קיים כך ש ⬄ קיים כך ש ⬄
2. יהי ⬄ ⬄ לכל מתקיים ⬄ כל מתקיים

# הגדרה

ויהיו . נסמן הפונ. המצומצמת. תחומה הוא A והמול תחום Y. לכל מתקיים

# הגדרה

תהיינה A וB קבוצות. נאמר שA וB שקולות עוצמה(או בעלות עוצמה שווה) אם קיימת הפיכה.

נסמן (לעיתים )

מתקיים:

רפלקסיביות: שכן קיימת

סימטריות: אם קיימת הפיכה אז הפיכה גם היא()

טרנזיטיביות: , אם חח"ע ועל אזי גם חח"ע ועל ולכן הפיכה ו

שקילות עצמה זה כמו יחס שקילות, אבל זה לא באמת יחס כי אין דבר כזה קבוצה של כל הקבוצות.

# הגדרה

תהי A קבוצה. A תקרא קב' סופית אם אם אם קיים כך ש  
במקרא הראשון נסמן ובמקרה השני

אם A איננה סופית, היא תקרא אינסופית

# דוגמאות

. אבל הקבוצות שקולות עצמה שכן קיימת : הפיכה. לכן

: קיימת הפונקציה

הערה:

# טענה

תהי הפיכה ונניח ש. אזי

## הוכחה

נסמן . מתקיים , שכן:

יהי , f על לכן קיים כך ש

נשים לב שלכל => שכן f חח"ע. לכן ולכן

קומבינטוריקה

# עקרון הסכום

תהיינה A וB קבוצות סופיות כך ש, אזי

## הוכחה

נסמן . לכן ולכן

# טענה

תהיינה A וB קבוצות סופיות כך ש אזי

## הוכחה

נשים לב ש לכן לפי טענה קודמת ולכן

# עקרון הכפל

תהיינה A וB קבוצות סופיות. אזי

## הוכחה

. לכן

*כל האיברים שונים ולכן*

# דוגמה

כמה מילים בנות 2 אותיות קיימות כך שהאות הראשונה והאות השנייה

## תשובה

# עקרון המכפלה המורחב

תהיינה קב' סופיות אזי

# דוגמה

כמה מילים בנות 5 אותיות קיימות כך ש2 האותיות הראשונות ו3 האחרונות ?

## תשובה

לפי עקרון המכפלה המורחב

# הגדרה

תהי A קבוצה ותהי . הפונ' המציינת של X תסומן (או ) היא ומוגדרת:

# תרגיל

תהי . כמה תתי קבוצוןת יש לA?

## פתרון

נוכיח ש, ואז מתקיים לפי עקרון המכפלה המורחב

נגדיר ע"י:

f חח"ע ועל(הוכיחו!). מש"ל

# עקרון הכפל(גירסה 2)

נניח שבתהליך מסוים נבנים אברי קבוצה מסויימת, בתהליך r שלבים ובשלב הi יש בדיוק אפשרויות(לא בהכרח עבור ). אזי מספר איברי הקבוצה הוא

# עקרון הסכום המורחב

תהיינה קבוצות סופיות וזרות בזוגות אזי

# טענה

תהיינה A וB קבוצות סופיות אזי

## הוכחה

מתקיים לפי עקרון הסכום המורחב

=>

=>

לכן

# הגדרה

תהי A קבוצה סופית, . סדרה של איברי A(סדר חשוב) באורך n בלי חזרות תקרא תמורה(פרמוטציה) של A

# טענה

, מספר התמורות של A הוא

## הוכחה

ברצוננו לספור את מספר המילים(סדר חשוב) באורך n הבנויות מאברי A בלי חזרות. מספר האפשרויות עבור האות הראשונה הוא n, עבור השנייה n-1 וכך הלאה, ולכן לפי עקרון המכפלה המורחב(גירסה 2) ישנן מילים כנ"ל

## דוגמה

בכמה דרכים ניתן לסדר על ספסל ישר בן 13 מושבים 13 ילדים? תשובה:

בכמה דרכים ניתן לסדר על ספסל עגול בן 13 מושבים 13 ילדים?

### תשובה

דרך א': נשים ילד ראשון(דרך אחת, כי ניתן לסובב המעגל) ואז נותר לערבב 12 ילדים לכן

דרך ב': לכל תמורה יש 13 תמורות שקולות(כולל היא עצמה) לכן המספר הכולל הוא